

# Limity funkcí

## 7. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

### Teorie:

**VĚTA** (Limita složené funkce)

Buď  $c, D, A \in \mathbb{R}^*$ , a necht' jsou  $f$  a  $g$  funkce. Necht' platí, že  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ ,  $\lim_{x \rightarrow D} f(x) = A$ .

Necht' platí alespoň jedna z podmínek:

$$\exists \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta): g(x) \neq D \quad (P)$$

$$f \text{ je spojitá v } D. \quad (S)$$

Pak platí  $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$ .

**POZNÁMKA** (Znamé limity)

Platí, že:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ , a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

### Příklady:

1. Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}$ , ( $m, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$ )

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ , ( $m, n \in \mathbb{N}$ )

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 1} ([x] - x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt{x+9} - 2}$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[ \frac{1}{x} \right]$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ , ( $m, n \in \mathbb{N}$ )

l)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ )

m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$

n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$